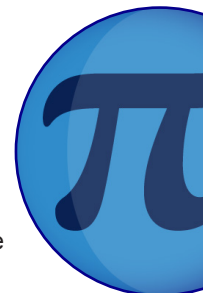




Гиперболическая геометрия

Основное содержание урока

Фильм начинается с краткого описания простого и интуитивно понятного подхода Евклида к геометрическому рассуждению, одновременно задается вопрос: является ли это геометрией, которая наилучшим образом описывает наш мир? Затем описывается альтернативная геометрия: сначала эллиптическая геометрия, описывающая поверхность сферы, затем гиперболическая геометрия, описывающая искривленное пространство современной физики. Отношения гиперболической тригонометрии излагаются в противоречии с традиционной Евклидовой геометрией. Зрителям не обязательно понимание всей сложности гиперболической геометрии, но данные сложности помогают выделить те аспекты евклидовой геометрии, которые иначе могли бы считаться сами собой разумеющимися.



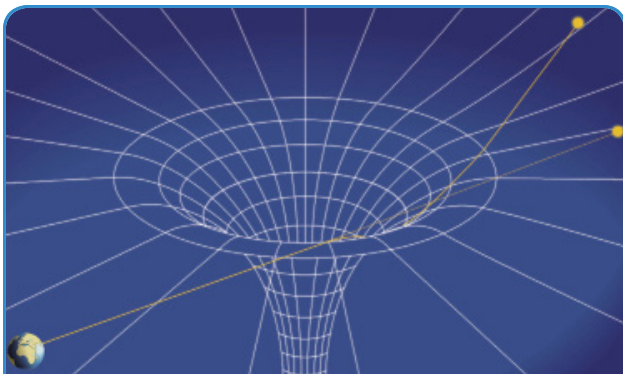
Основные результаты

Цели урока

- Сформировать понятие о том, что подразумевается под параллельной линией.
- Ввести понятие о том, что подразумевается под параллельной линией в искривленном пространстве.
- Развивать умение использовать теорему Пифагора в двух измерениях.
- Развивать умение использовать синус, косинус и тангенс и отношения между ними.

Рекомендуемые задания

- Изучение представления параллельной линии на плоском листе бумаги и на поверхности земного шара.
- Изучение представления прямой линии в искривленном (гиперболическом) пространстве с помощью диска Пуанкаре.
- Установление стандартных соотношений между синусом, косинусом и тангенсом согласно основополагающим принципам.



Евклидова геометрия имеет одну параллельную линию, а в эллиптической геометрии нет ни одной.

Дополнительные результаты

Цели урока

- Ввести понятие о том, что Евклидова геометрия – только одна из нескольких геометрий в математике.
- Сформировать понятие о том, что эллиптическая геометрия описывает поверхность сферы.
- Сформировать понятие о том, что в эллиптической геометрии нет параллельных прямых.
- Сформировать понятие о том, что современная физика предполагает то, что пространство искривлено, и использует гиперболическую геометрию и тригонометрию.

Рекомендуемые задания

- Рассмотрение аксиомы Евклида и исследование значимости аксиомы параллельности в геометрии.
- Рассмотрение утверждений, которые являются математическим эквивалентом аксиомы параллельности, и размышление над тем, каким будет наше восприятие, если эти утверждения не соответствуют действительности.
- Построение треугольников на поверхности сферы с суммой углов больше, чем 180 градусов.
- Построение треугольников на диске Пуанкаре с суммой углов меньше, чем 180 градусов.

Похожие фильмы

Рекомендуется использовать до урока:

Геометрия: Евклид

В данном фильме описывается взгляд на традиционное представление о геометрии, первоначально истолкованное Евклидом, которое оставалась неизменным на протяжении двух тысяч лет.

Измерение Земли

Этот фильм показывает, как можно определить окружность Земли с помощью евклидовой геометрии.

Рекомендуется использовать после данного урока:

Топология

В этом фильме исследуются странные и удивительные формы, которые бросают вызов нашим способностям восприятия, даже в евклидовом пространстве.

Теория чисел: Гаусс

В этом фильме описываются труды математика, который измерил кривизну пространства.

План урока

Вводный этап

Спросите учащихся, сколько углов имеет треугольник. Спросите их, возможно ли нарисовать треугольник, углы которого составляют в сумме больше или меньше 180 градусов. Спросите, как они будут доказывать свое мнение.

Демонстрация фильма

Гиперболическая геометрия

Основной этап

Базовый уровень

Начните с определения параллельной линии: нарисуйте прямую линию на доске, а затем добавьте точку в любом месте на доске, но не на линии. Параллельная линия – это любая прямая, проходящая через точку, которая не пересекается с первой линией, продленной до бесконечности. Согласитесь, что существует только одна параллельная линия через заданную точку. Затем сделайте то же самое на сфере, сперва обсудив, что подразумевается под прямой на сфере. Если прямая линия – это кратчайшее расстояние между любыми двумя точками, то все прямые линии – большие круги, как и экватор. Согласитесь, что любые два больших круга на сфере должны пересекаться, если нет параллельных линий. И, наконец, постройте треугольник на сфере с основанием вдоль экватора и вершиной на Северном полюсе. Спросите: Чему равна сумма углов в треугольнике? (Ответ: больше 180 градусов).

Основной этап продолжение ...

Углубленный уровень

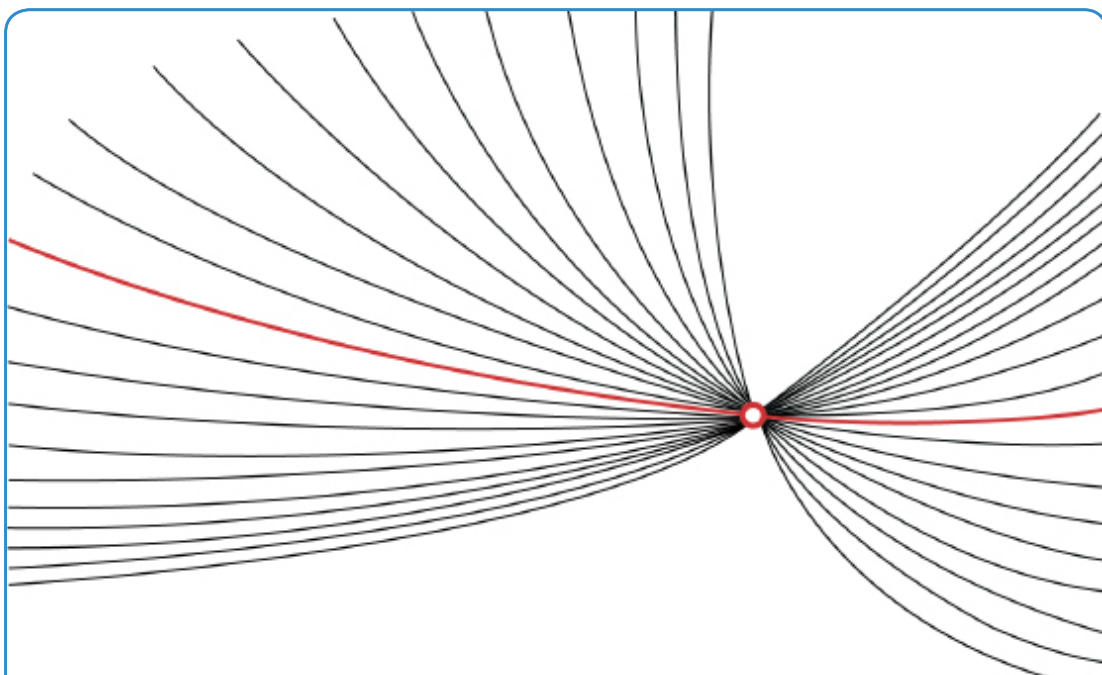
Раздайте список пяти основных аксиом Евклида и обсудите значение каждой аксиомы. Спросите, есть ли среди них те, кто не согласен с аксиомами. Затем опишите вкратце трудности, с которыми пришлось сталкиваться математикам в попытке доказать аксиому параллельности, в отличие от остальных четырех (изложите аксиому параллельности следующим образом: задана линия l и точка вне линии l , имеется только одна линия, которая содержит эту точку и которая параллельна линии l). Рассмотрите утверждения, эквивалентные аксиоме. Попробуйте представить себе мир, где эти утверждения не соответствуют действительности. Затем перепишите аксиому параллельности, начиная со слов “нет линии ...”, потом словами “имеется много линий ...” и объясните, что они определяют эллиптическую геометрию и, соответственно, гиперболическую геометрию.

Дополнительное задание

Предоставьте учащимся доступ к интерактивной модели диска Пуанкаре, Евклидовой модели гиперболического или искривленного пространства, где все пространства ограничены в пределах окружности, и прямые линии кажутся изогнутыми (найдите в Интернете прикладную программу диска Пуанкаре). Предложите учащимся построить несколько линий через точку, параллельно данной линии, и треугольники, с суммой углов меньше 180 градусов.

Необязательное дополнительное задание

Рассмотрите определения синуса, косинуса и тангенса и установите, что $\tan \theta = \sin \theta / \cos \theta$. Нарисуйте прямоугольный треугольник с длиной гипотенузы в 1 и используйте теорему Пифагора, чтобы доказать, что $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1^2$. Дайте альтернативный результат для гиперболических функций $\sinh \theta$ и $\cosh \theta$. Узнайте значения $\sinh \theta$ и $\cosh \theta$ с помощью научного калькулятора.



Боляй и Лобачевский изобрели новый вид тригонометрии, который мог бы описать отношения между линиями и углами в гиперболическом пространстве, которое изгибается с одной точки.